

I Limite en l'infini



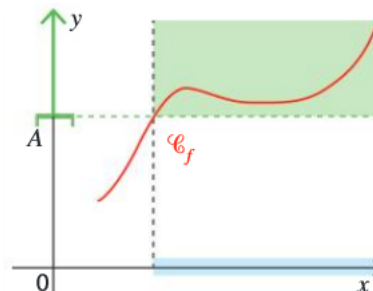
Définition : Limite infinie en $+\infty$

- Une fonction f a pour **limite** $+\infty$ **en** $+\infty$ si pour tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- Une fonction f a pour **limite** $-\infty$ **en** $+\infty$ si pour tout intervalle ouvert de la forme $] -\infty; A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$



— REMARQUE —

On définit de façon analogue les limites infinies en $-\infty$.



Propriété : Limite de quelques fonctions usuelles

Soit $n \geq 1$ un entier. Alors :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

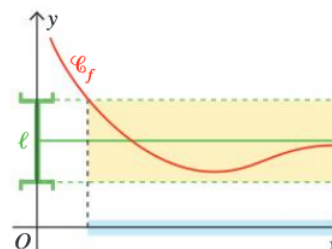


Définition : Limite finie en $+\infty$

Soit ℓ un réel.

Une fonction f a pour **limite** ℓ **en** $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$



— REMARQUE —

On définit de façon analogue les limites finies en $-\infty$.



Propriété : limites de quelques fonctions usuelles

Soit $n \geq 1$ un entier. Alors :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \quad 3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad 4. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$



Définition : Asymptote horizontale

Lorsqu'une fonction a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, on dit que sa courbe représentative admet pour **asymptote horizontale** en $+\infty$ la droite d'équation $y = \ell$.

REMARQUE

On définit de façon analogue un asymptote horizontale en $-\infty$.

II Limite en un réel



Définition : Limite infinie en un réel

Soit $a \in \mathbb{R}$

- Une fonction f a pour **limite** $+\infty$ **en** a si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

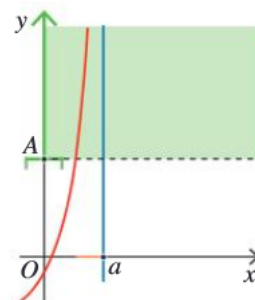
On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

- Une fonction f a pour **limite** $-\infty$ **en** a si tout intervalle ouvert de la forme $] -\infty; A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Une fonction f a pour **limite** ℓ **en** a si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

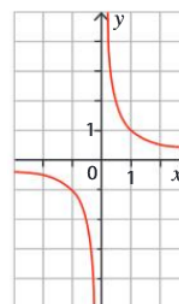


REMARQUE

Une fonction peut avoir une **limite "à gauche"** et une **limite "à droite"** différentes.

Par exemple, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$.

$\underbrace{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x}}_{\text{limite "à gauche"}}$
 $\underbrace{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x}}_{\text{limite "à droite"}}$



REMARQUE

Lorsqu'une fonction a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en $a \in \mathbb{R}$, on dit que sa courbe représentative admet pour **asymptote verticale** la droite d'équation $x = a$.

III Opération sur les limites

Propriété : Somme, produit et quotient de limites

1. Limite de la somme de deux fonctions

Si $\lim f = \dots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim g = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim (f + g) = \dots$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

2. Limite du produit de deux fonctions

Si $\lim f = \dots$	ℓ	ℓ	∞	0
et $\lim g = \dots$	ℓ'	∞	∞	∞
alors $\lim (f \times g) = \dots$	$\ell \ell'$	∞	∞	Forme indéterminée

3. Limite du quotient de deux fonctions

Si $\lim f = \dots$	ℓ	ℓ	ℓ	∞	∞	0
et $\lim g = \dots$	$\ell' \neq 0$	0	∞	ℓ	∞	0
alors $\lim \left(\frac{f}{g}\right) = \dots$	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞	0	∞	Forme indéterminée	Forme indéterminée

Propriété : Composée de limites

a, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

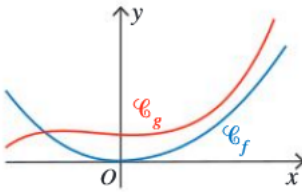
$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{X \rightarrow b} g(X) = c \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$$

IV Limites et comparaison

Propriété : Théorème de comparaison

Soient deux fonctions f et g telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle du type $[A; +\infty[$.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$



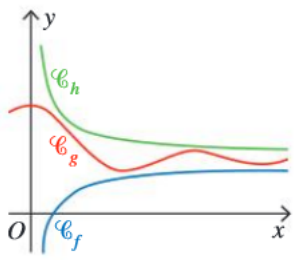
Propriété : Théorème d'encadrement - dit des gendarmes

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et trois fonctions f, g et h telles que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

sur un intervalle du type $[A; +\infty[$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$



V Fonctions continues



Définition : Fonction continue sur un intervalle

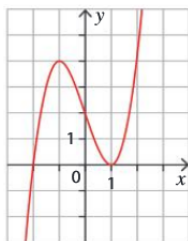
Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que f est **continue en** $a \in I$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est **continue sur** I si f est continue en tout point de I .

Exemple : La fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

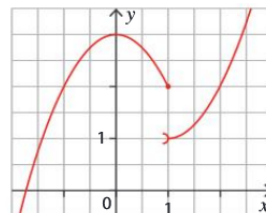
f est continue sur \mathbb{R} .



Contre-exemple : La fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

f n'est pas continue en 1 donc n'est pas continue sur \mathbb{R} .



Propriété : Premiers exemples de fonctions continues

- Les fonctions usuelles c'est à dire affines, polynômiales, la fonction racine carrée et exponentielle sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont des fonctions continues.
- Une fonction dérivable sur I est continue sur I .

REMARQUE

La réciproque du troisième point est fautive ! Par exemple les fonctions racine carré ou valeur absolue ne sont pas dérivables en 0 et sont pourtant continues.



Propriété : Continuité et suites convergentes

Soit f continue sur un intervalle I , $a \in I$ et (u_n) une suite à valeurs dans I .

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$$

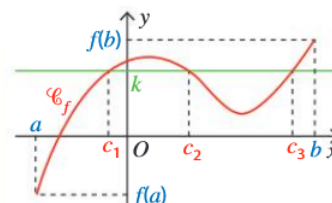
VI Théorème des valeurs intermédiaires



Propriété : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$.



Propriété : Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, si f est de plus **strictement monotone**, alors $f(x) = k$ admet une **unique** solution.

REMARQUE

On peut établir ce théorème dans les cas où f est continue sur des intervalles du type $]a; b[$ ou $[a; b[$ ou $]a; b]$ où a et b désignent des réels ou ∞ .