
Devoir surveillé N° 4

Il sera tenu compte dans la correction de la copie de la rédaction mais aussi de la propreté de votre travail.

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10000$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 200$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$4000 > u_{n+1} > u_n$$

Que peut-on en déduire? Justifier.

Exercice 2

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays. Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7% des habitants sont infectés par cette maladie.

- Parmi les individus infectés, 20% sont déclarés négatifs.
- Parmi les individus sains, 1% sont déclarés positifs.

Une personne est choisie au hasard dans la population. On note :

- M l'évènement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T l'évènement : « le test est positif ».

On donnera les résultats sous forme approchée à 10^{-2} près.

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. (a) Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif?
(b) Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,0653.
3. On sait que le test de la personne choisie est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée?

On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.

4. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.
5. (a) Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
(b) Déterminer la probabilité qu'au plus quatre personnes aient un test positif.
(c) Déterminer la probabilité qu'entre trois et sept personnes aient un test positif.
(d) Déterminer la probabilité qu'au moins une personne ait un test positif.
6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à 99%.