Chapitre 6 Continuité

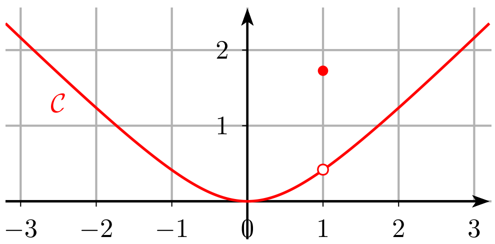
Échauffement

1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1}-1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \alpha & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

de graphe $\mathcal{C}$ dans le repère ci-dessous où ● indique un point qui est sur $\mathcal{C}$ et ○ un point qui n'est pas sur $\mathcal{C}$.



1. Justifier que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.
2. Donner les valeurs de $f(1)$ et des limites de f en 1 à gauche et à droite.
3. Que doit valoir α pour que f soit continue ?

2

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$h(x) = \frac{2x^3+x-1}{x^3-1}$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Donner les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$ puis en 1.
2. En déduire les équations des asymptotes à $\mathcal{C}$.

3

Soit la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{5x}{3x-5}}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Écrire f comme composée de deux fonctions.
3. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à $\mathcal{C}$.

4

Soit k un entier et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer k pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2-5 & \text{si } x < 1 \\ k & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

5

La fonction f définie sur $[-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}} & \text{si } x > -1 \\ 1 & \text{si } x = -1. \end{cases}$$

est-elle continue en -1 ?

6

Une fonction h a pour tableau de variation :

x	-3		-1		2		5		9
h	4	↘	-5	↗	7	↘	1	↗	3

1. Justifiez que $h(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle :
   (a) $[-3\ ;\ -1]$;
   (b) $[-1\ ;\ 2]$.
2. Justifiez que $h(x) = 0$ ne possède pas de solutions sur l'intervalle $[2\ ;\ 9]$.
3. Donner le signe de la fonction h sur $[-3\ ;\ 9]$.

7

Une fonction g a pour tableau de variation :

x	$-\infty$		-4		0		3		$+\infty$
g	3	↘	-1	↗	2	↘	1	↗	7

1. Quel est l'ensemble de définition de cette fonction ?
2. Déterminer le nombre de solutions de $g(x) = 0$. (en le justifiant)
3. Discuter en fonction de k le nombre de solutions de l'équation $g(x) = k$.

8

Soit la fonction f définie sur $I = [-4\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$$

dont les variations sont données par le tableau suivant :

x	-4		-3		-1		1
f	-1	↗	3	↘	-1	↗	19

1. Justifier que f est continue sur I.
2. Dénombrer les solutions de l'équation $f(x) = 2$.
3. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α.
   (b) Déterminer un encadrement de α à l'unité près.

9

Une fonction g a pour tableau de variation :

x	-10		-4		0		3		10
g	$\sqrt{2}$	↘	$-\pi$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Discuter, suivant la valeur de k, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = k$.