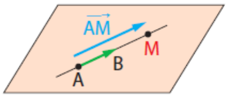
Chapitre VII

Représentation paramétrique d'une droite

I Caractérisation vectorielle des droites et plans de l'espace

Propriété : Caractérisation vectorielle d'une droite

Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.



Remarque

Un point A et un vecteur $\vec{u}$ suffisent à déterminer une droite : c'est la droite passant par le point A et de **vecteur directeur** $\vec{u}$.

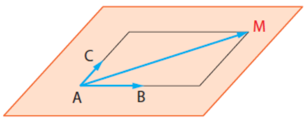
Propriété : Droites parallèles

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Propriété : Caractérisation vectorielle d'un plan

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace.
Un point M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe deux réels x et y tels que

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$



On dit que $\overrightarrow{AM}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

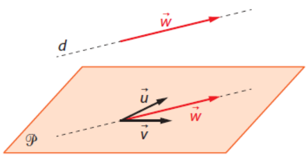
Remarque

- Les points A, B et C ne sont pas alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
- Un plan peut donc être défini par un point et deux vecteurs non colinéaires appelés **vecteurs directeurs** du plan.
- Deux plans dirigés par un même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Propriété : Vecteurs coplanaires

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires.

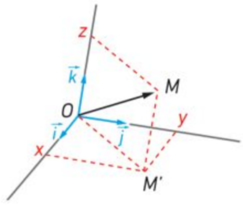
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.



II Repère et base de l'espace

Définition : Repère de l'espace

Un repère de l'espace est formé d'un point O, l'origine, et d'un triplet de vecteurs $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ non coplanaires.



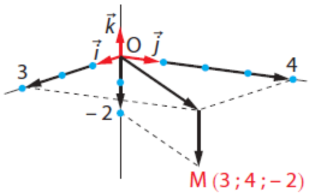
Propriété : Décomposition d'un vecteur dans une base

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère de l'espace.

— Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace il existe un unique triplet $(x;y;z)$ tel que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

— $(x;y;z)$ sont les **coordonnées** de $\vec{u}$. On note comme d'habitude $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

— Pour tout point M, si $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ alors M a pour coordonnées $M(x;y;z)$.



Propriété : Coordonnées d'un vecteur et milieu d'un segment

Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace. Alors :

— Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$.

— Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}\quad y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}\quad z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

III Représentation paramétrique d'une droite

Propriété : Représentation paramétrique d'une droite

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de l'espace, on considère un point $A(x_A;y_A;z_A)$, un vecteur non nul $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Pour tout point $M(x;y;z)$ de l'espace :

$$M\in d \iff \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases}$$

Ce système, quelque soit $t\in\mathbb{R}$, s'appelle une **représentation paramétrique** de d.

Remarque

Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.