Fonction logarithme

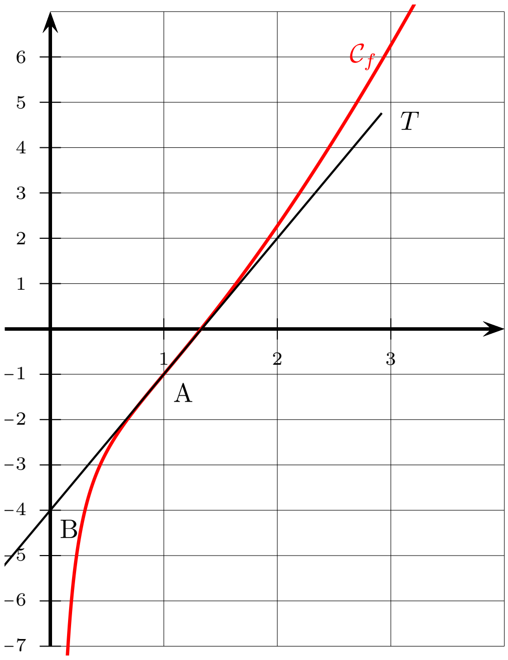
1 *Amérique du Nord 21 mai 2024*

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1\ ;\ -1)$.
Cette tangente passe également par le point B$(0\ ;\ -4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

   Que semble représenter le point A pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?

Partie B : étude analytique

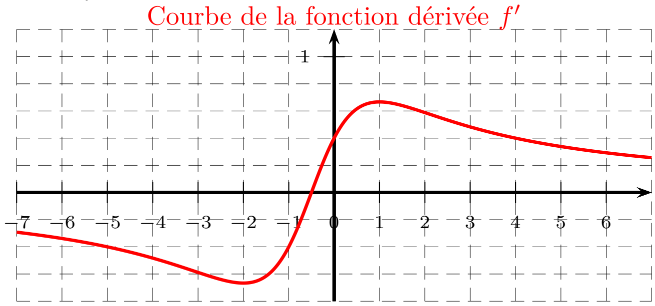
1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (a) Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,
   $$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$
3. (a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :
   $$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

2 *Asie 7 juin 2021*

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.

Courbe de la fonction dérivée f'



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
2. (a) Donner les variations de la fonction dérivée f'.
   (b) En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.
   (b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$.

   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

3 *Centres étrangers 12 mai 2022*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

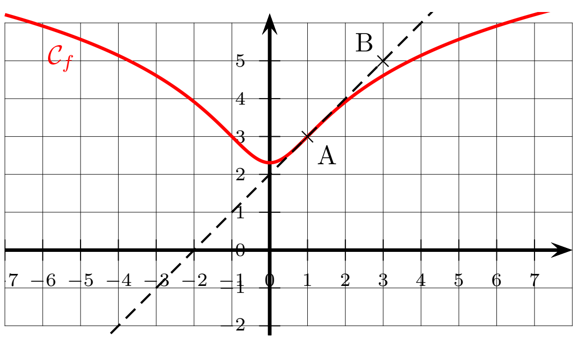
$$f(x) = x\ln(x) + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.
2. (a) On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
   Montrer que pour tout réel x strictement positif :
   $$f'(x) = 1 + \ln(x).$$
   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et les limites.
   (c) Justifier que pour tout $x \in]0\ ;\ 1[$, $f(x) \in]0\ ;\ 1[$.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   (b) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   (c) En déduire que pour tout réel $x > 0$:
   $$f(x) \geqslant x$$
4. On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 \in]0;1[$ et pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} = f(u_n)$$
   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.
   (b) Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n).
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4 *Asie 17 mai 2022*

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A$(1\,;\,3)$ et B$(3\,;\,5)$.
On donne ci-dessous $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.



Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln\left(ax^2+1\right) + b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
   (a) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   (b) Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \ln\left(x^2+1\right) + 3 - \ln(2).$$

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
4. À l'aide du tableau des variations de f, donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$.

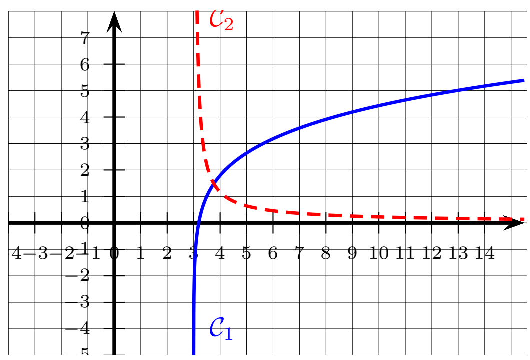
Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur R par $f(x) = \ln\left(x^2+1\right) + 3 - \ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f''(x) = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

5 *Asie 18 mai 2022*

Partie A



Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f', toutes deux définies sur $]3\ ;\ +\infty[$.

1. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente. Justifier.
2. Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 3$.
3. Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction f.

Partie B

1. Justifier que la quantité $\ln\left(x^2 - x - 6\right)$ est bien définie pour les valeurs x de l'intervalle $]3\ ;\ +\infty[$, que l'on nommera I dans la suite.

2. On admet que la fonction f de la Partie A est définie par $f(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right)$ sur I.

   Calculer les limites de la fonction f aux deux bornes de l'intervalle I.

   En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f sur I.

3. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à I.

   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur I.
   Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de I.

4. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5\,;\ 6[$.

   (b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.

5. (a) Justifier que $f''(x) = \dfrac{-2x^2 + 2x - 13}{\left(x^2 - x - 6\right)^2}$.

   (b) Étudier la convexité de la fonction f sur I.

6 *Amérique du Sud 26 septembre 2022*

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)].$$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

1. Justifier que $g(\mathrm{e})$ est strictement négatif.

2. Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

3. (a) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = -4x\ln(x)$.

   (b) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$

   (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

   (d) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

4. Déduire de ce qui précède le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

PARTIE B

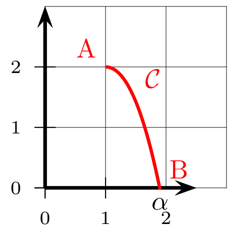
1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$, $g''(x) = -4[\ln(x) + 1]$.

   Justifier que la fonction g est concave sur l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$.

2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 1 et α.

   (a) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

   (b) En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$, $g(x) \geqslant \dfrac{-2}{\alpha - 1}x + \dfrac{2\alpha}{\alpha - 1}$.



7 *Métropole Sujet 1 19 juin 2024 (secours)*

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\{-2\}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	5	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

   (a) **Affirmation 1 :**
   La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.

   (b) **Affirmation 2 :**
   $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{f(x) - 5} = +\infty$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{-x}$.

   (a) **Affirmation 3 :**
   Le point $\mathrm{A}\left(2\ ;\ \dfrac{2}{e^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g.

   (b) **Affirmation 4 :**
   Pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ 2[$, on a $g(x) \leqslant x$.

3. **Affirmation 5 :**
   L'équation $x\ln(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.