Chapitre VIII

La fonction logarithme népérien

I Rappels sur la fonction exponentielle

Définition : Existence et unicité de la fonction exponentielle

Il **existe** une **unique** fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(0) = 1 \text{ et } f' = f$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**. On la note $x \mapsto \exp(x)$ ou $x \mapsto \mathrm{e}^x$ (où $e = \exp(1) \approx 2,72$).

Propriété : Variation et signe

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

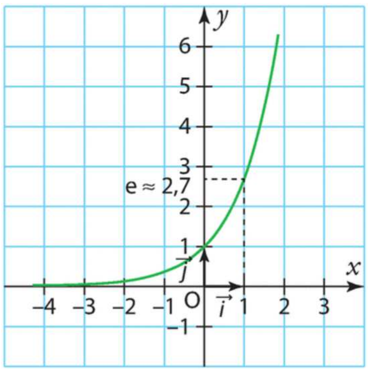
$$\mathrm{e}^x > 0$$

— La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété : Propriétés algébriques

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

1. $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$
2. $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$
3. $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$
4. $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$



Courbe représentative

Propriété : Croissances comparées

Pour tout entier naturel n on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n \, \mathrm{e}^x = 0$$

II La fonction logarithme népérien

Définition : Logarithme népérien

Le **logarithme népérien** du réel positif non nul a est la solution de l'équation $\mathrm{e}^x = a$. On la note $\ln(a)$.
La fonction logarithme népérien est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\ln : x \mapsto \ln(x)$.

Remarques

— Il s'agit de la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle. En effet $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ pour $x > 0$ et $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$. En particulier $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

— En sciences et en particulier en chimie, on utilise la fonction **logarithme décimal** notée log, qui est la réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$. Elle est définie par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

PROPRIÉTÉ : PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE LA FONCTION LOGARITHME

Pour tous réels a et b strictement positifs et tout $m \in \mathbb{Q}$,

1. $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
3. $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
4. $\ln(a^m) = m \times \ln(a)$

III Étude de la fonction logarithme

PROPRIÉTÉ : DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION LOGARITHME

La fonction logarithme népérien est **continue** et **dérivable** sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Si u est une fonction définie et strictement positive sur un intervalle I alors $\ln \circ u$ est dérivable sur I et

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$$

PROPRIÉTÉ : VARIATIONS DE LA FONCTION LOGARITHME

La fonction logarithme népérien est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$.

Conséquences

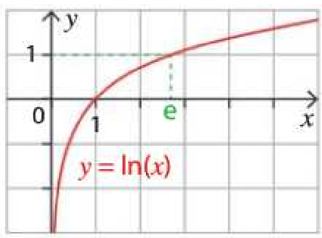
Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$,
- $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si $a = b$
- $\ln(a) \leq \ln(b)$ si et seulement si $a \leq b$

PROPRIÉTÉ : LIMITES EN 0 ET $+\infty$ DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

<u>**Représentation graphique**</u> : La courbe de la fonction logarithme népérien admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$



PROPRIÉTÉ : CROISSANCES COMPARÉES

Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} x^n \ln(x) = 0$$