Échauffement

Chapitre VIII - Fonction logarithme

1 Simplifier
Pour vous entraîner au calcul avec des exponentielles fiches 9 et 10 du cahier de calcul niveau première

1. $e^{2a} \times (e^{-a})^3$
2. $\dfrac{e^{2a+1}}{e^{2-a}}$
3. $\dfrac{e \times e^{2a}}{e^{a+1}}$
4. $(e^{2a+1})^3 \times (e^{-3a})^2$
5. $\dfrac{e^{2-3a}}{e^{1+a}}$
6. $\dfrac{e^{3a+1}}{e^{a} \times e}$

2 Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} - x + 1$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1)\, e^{x}$.

3 On considère la fonction f définie pour tout réel x, par $f(x) = e^{2x} - e^{x} - 6$.

1. Vérifier que, pour tout réel x, on a $f(x) = (e^{x} + 2)(e^{x} - 3)$.
2. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ puis vers $-\infty$.

4 Simplifier.
Pour vous entraîner au calcul avec des logarithmes faire les fiches 3 et 4 du cahier de terminale.

1. $\ln(7) + \ln(8)$
2. $3\ln(2)$
3. $-2\ln(4)$
4. $\dfrac{1}{2}\ln(27)$
5. $e^{\ln(3)}$
6. $e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$
7. $\ln(e^5)$
8. $\ln(1) + \ln(e)$
9. $3\ln(2) - \ln(4)$
10. $(\ln(e^3))^2$
11. $e^{4\ln 2}$
12. $\dfrac{e^{\ln(5)-1}}{e^{2+\ln(5)}}$
13. $30\ln(\sqrt{e}) - e^{3\ln(3)}$
14. $\ln(3+\sqrt{5}) + \ln(3-\sqrt{5})$

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{-x} = 7$
2. $\ln(x) = -2$
3. $\ln(-2x+1) = 4$
4. $e^{-x+1} - 1 = 0$
5. $(2e^{x} - 1)(e^{x} + 5) = 0$
6. $2\ln(x) - 1 = 0$
7. $(\ln(x))^2 = 9$
8. $e^{3x-2} = 2$

6 Calculer la dérivée des fonctions suivantes et déterminer leur sens de variation sur leur ensemble de définition :

Pour travailler la dérivation des fonctions logarithmes voir la fiche 5 du cahier de terminale.

1. $f(x) = 2\ln(x) - x$
2. $f(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}x^2 + 1$
3. $f(x) = -\ln(x) + x^2 - 1$
4. $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$
5. $f(x) = \ln(1 + e^{x})$
6. $f(x) = \ln(\sqrt{x})$
7. $f(x) = \ln(1 + e^{-2x})$
8. $f(x) = x\ln(3x)$

7 Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -2\ln(x) + x + 1$ en 0.
2. $f(x) = -x\ln(x) - x - 1$ en $+\infty$.
3. $f(x) = -(\ln(x))^2 + \ln(x)$ en 0.
4. $f(x) = (e^{x} - 1)(2 - \ln(x))$ en $+\infty$.
5. $f(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{x}$ en 0.
6. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{e^{x}}$ en $+\infty$.
7. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ en 0.

8 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x+1}$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
2. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}\left(\dfrac{1}{2+\frac{1}{x}}\right)$. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

9 Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$.

1. Justifiez que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

10 On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Construire le tableau de variations complet de f.
4. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{2 - 2x^2}{(1+x^2)^2}$
5. Construire le tableau de signes de f'' et en déduire les intervalles lesquels f est convexe/concave.

11 On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2 + \ln(x)}{x}$.
Étudier la convexité de la fonction f sur son ensemble de définition. Déterminer les éventuels points d'inflexion.

12 Résoudre les inéquations suivantes, où n désigne un entier naturel.

1. $2^n \geq 10^{12}$
2. $0,9^n < 10^{-1000}$
3. $3 \times 4^n > 10^{50}$

13 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 1,001$. Déterminer, s'il existe, le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 10000$.