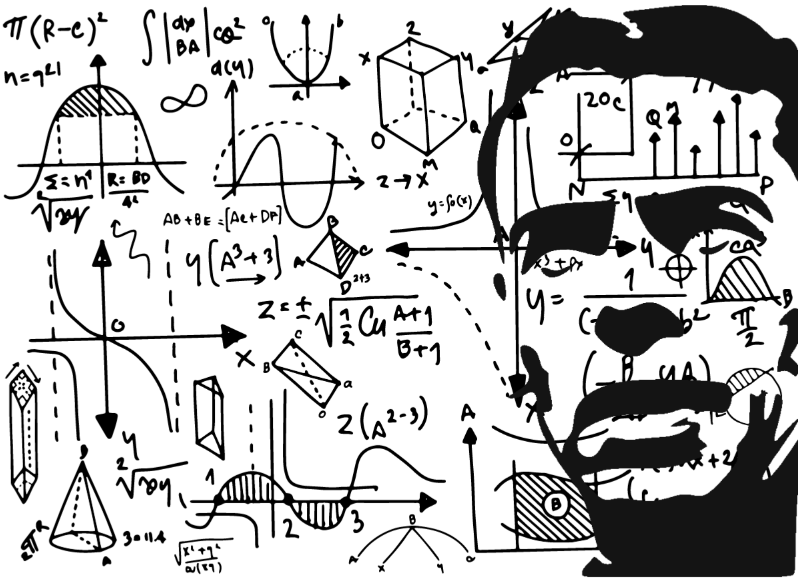
Lycée Jacques Brel, La Courneuve 2024-2025

# Sujets d'entraînement

*Vacances d'hiver*
*du 17 au 28 février 2025*



Mme DAOUD M. LOURTAU M. PELLÉ

## Probabilités

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

### Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- $D$ l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- $A$ l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènements $D$ et $A$ respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement $A$ est égale à $0,24$.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

### Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $0,24$.

   On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par $X$ la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

(a) On admet que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?

(b) Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.

(c) Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.

2. Un lycée présente $n$ candidats au recrutement dans cette école, où $n$ est un entier naturel non nul.

   On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

   (a) Donner l'expression, en fonction de $n$, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.

   (b) À partir de quelle valeur de l'entier $n$ la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à $0,99$ ?

## Probabilités

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à $10^{-3}$.

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

### Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est $0,98$ (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est $0,995$ (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.
On note $D$ l'évènement « l'athlète est dopé » et $T$ l'évènement « le test est positif ».
On admet que la probabilité de l'évènement $D$ est égale à 0,08.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.

2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.

3. (a) Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?

   (b) Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à $0,95$.

   Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

**Partie B**

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est $0,103$.

1. Dans cette question **1.** on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.

   On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.

   (a) Donner la loi suivie par la variable aléatoire $X$. Préciser ses paramètres.

   (b) Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

   (c) Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?

2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à $0,75$ ? Justifier.

## Suites

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.
Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020 + n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\ 000$.

1. Calculer $u_1$.
2. Justifier que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.
3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite( n) :
    u = 1 000
    for i in range(n) :
        u = 0,9*u + 250
    return u
```

4. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant 2\ 500$.
   (b) Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)$ est convergente.
5. Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_n = u_n - 2\ 500$ pour tout entier naturel $n$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $0,9$ et de terme initial $v_0 = -1\ 500$.
   (b) Pour tout entier naturel $n$, exprimer $v_n$ en fonction de $n$ et montrer que :
   $$u_n = -1\ 500 \times 0,9^n + 2\ 500.$$
   (c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ et interpréter dans le contexte de l'exercice.
6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.

   Déterminer cette année.

## Suites

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.

Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite $(u_n)$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0,6 \\ u_{n+1} & = & 0,75u_n\left(1-0,15u_n\right) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel $n$, $u_n$ désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x)=0,75x(1-0,15x).$$

2. Montrer que la fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x)=x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$.

4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.
   (c) Déterminer la limite $\ell$ de la suite $(u_n)$.
5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.
   (a) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
   (b) Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-dessous :

```
def menace()
  u = 0,6
  n = 0
  while u > 0,02
        u = 0,75*u*(1-0,15*u)
        n = n+1
  return n
```

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

## Fonctions

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé.

1. (a) Préciser la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

   (b) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$$

   où $f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $f$.

3. Déterminer les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   On établira un tableau de variations de la fonction $f$ dans lequel apparaîtront les limites.

4. Soit $m$ un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel $m$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

5. On note $\Delta$ la droite d'équation $y = -x$.

   On note A un éventuel point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $a$ en lequel la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite $\Delta$.

   (a) Montrer que $a$ est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.

   On note $g$ la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2$.

   On admet que la fonction $g$ est dérivable et on note $g'$ sa fonction dérivée.

(b) Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de $g$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

(c) Montrer qu'il existe un unique point $A$ en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite $\Delta$.

## Fonctions

### Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit $g$ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) + 2x - 2.$$

1. Déterminer les limites de $g$ en $+\infty$ et 0.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction $g$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

### Partie II : Étude d'une fonction $f$

On considère la fonction $f$, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1).$$

1. (a) On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note $f'$ sa dérivée.

   Démontrer que, pour tout $x$ de $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$. Le calcul des limites n'est pas demandé.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ puis dresser le tableau de signes de $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

**Partie III : Étude d'une fonction $F$ admettant pour dérivée la fonction $f$**

On admet qu'il existe une fonction $F$ dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ dont la dérivée $F'$ est la fonction $f$.
Ainsi, on a : $F' = f$.
On note $\mathcal{C}_F$ la courbe représentative de la fonction $F$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1. Étudier les variations de $F$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. La courbe $\mathcal{C}_F$ représentative de $F$ admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?

   Justifier la réponse.

## Fonctions & Suites

Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

On considère la suite $(u_n)$ de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ pour tout entier naturel $n$.

**Partie I :**

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite $(u_n)$.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | $n$ | $u_n$ |
| 2 | 0 | 10 |
| 3 | 1 | 7,802 775 42 |
| 4 | 2 | 5,885 444 74 |
| 5 | 3 | 4,299 184 42 |
| 6 | 4 | 3,105 509 13 |
| 7 | 5 | 2,360 951 82 |
| 8 | 6 | 2,052 767 5 |
| 9 | 7 | 2,001 345 09 |
| 10 | 8 | 2,000 000 9 |

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de $(u_n)$ par recopie vers le bas ?
2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)$.

**Partie II :**

On rappelle que la fonction $f$ est définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. (a) Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$. Montrer que pour tout $x \in\ ]1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.
   (b) En déduire le tableau des variations de $f$ sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, complété par les limites.
   (c) Justifier que pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant 2$.

**Partie III :**

1. En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel $n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente. On note $\ell$ sa limite.
4. On admet que $\ell$ vérifie $f(\ell) = \ell$. Donner la valeur de $\ell$.

## Fonctions & Probabilités

**Partie A :**

Dans un pays, une maladie touche la population avec une probabilité de $0,05$.
On possède un test de dépistage de cette maladie.

On considère un échantillon de $n$ personnes ($n \geqslant 20$) prises au hasard dans la population assimilé à un tirage avec remise.
On teste l'échantillon suivant cette méthode : on mélange le sang de ces $n$ individus, on teste le mélange.
Si le test est positif, on effectue une analyse individuelle de chaque personne.
Soit $X_n$ la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses effectuées.

1. Montrer $X_n$ prend les valeurs 1 et $(n+1)$.
2. Prouver que $P(X_n = 1) = 0,95^n$.

   Établir la loi de $X_n$ en recopiant sur la copie et en complétant le tableau suivant :

   | $x_i$ | 1 | $n+1$ |
   |---|---|---|
   | $P(X_n = x_i)$ | | |

3. Que représente l'espérance de $X_n$ dans le cadre de l'expérience ?

   Montrer que $E(X_n) = n + 1 - n \times 0,95^n$.

**Partie B :**

1. On considère la fonction $f$ définie sur $[20\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x\ln(0,95)$.

   Montrer que $f$ est décroissante sur $[20\ ;\ +\infty[$.
2. On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
3. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution $a$ sur $[20\ ;\ +\infty[$.

   Donner un encadrement à 0,1 près de cette solution.
4. En déduire le signe de $f$ sur $[20\ ;\ +\infty[$.

**Partie C :**

On cherche à comparer deux types de dépistages.
La première méthode est décrite dans la partie A, la seconde, plus classique, consiste à tester tous les individus.
La première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $E(X_n) < n$.
En utilisant la partie B, montrer que la première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes maximum.

## Fonctions

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{4}x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.

**Partie A**

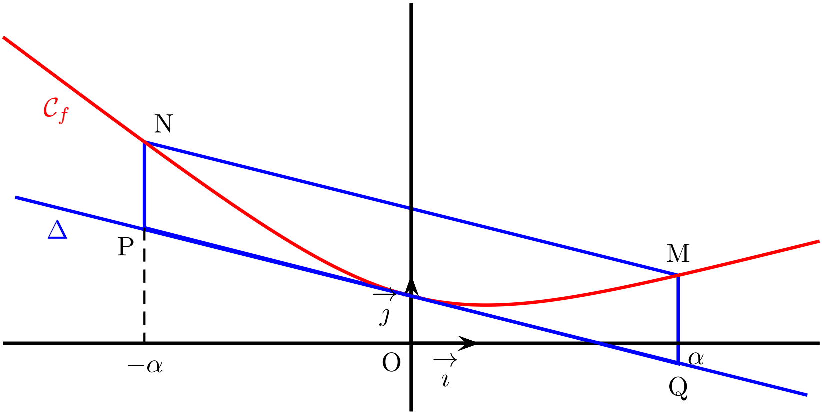
1. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
2. On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.
   (a) Montrer que, pour tout réel $x$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 3}{4\left(\mathrm{e}^x + 1\right)}$.
   (b) En déduire les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[2\,;\,5]$.

**Partie B**

On admettra que la fonction $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$,

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2}.$$

On note $\Delta$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}_f$ la tangente $\Delta$ et le quadrilatère MNPQ tel que M et N sont les deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives $\alpha$ et $-\alpha$, et Q et P sont les deux points de la droite $\Delta$ d'abscisses respectives $\alpha$ et $-\alpha$.




## À retenir

**Définition** : Soient deux points A et B situés sur la courbe représentative d'une fonction $f$ alors le segment $[AB]$ est appelé sécante.

**Théorème** : Soit une fonction $f$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

- $f$ est convexe sur un intervalle $I$ si et seulement si pour tout $x \in I$, $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de ses sécantes.
- $f$ est concave sur un intervalle $I$ si et seulement si pour tout $x \in I$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses sécantes.

1. (a) Justifier le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que la portion de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[-\alpha\ ;\ \alpha]$, est inscrite dans le quadrilatère MNPQ.
2. (a) Montrer que $f(-\alpha) = \ln\left(\mathrm{e}^{-\alpha} + 1\right) + \dfrac{3}{4}\alpha$.
   (b) Démontrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

$\boxed{\textbf{QCM}}$

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

**Question 1 :**

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie pour tout $n$ entier naturel par

$$u_n = \frac{1 + 2^n}{3 + 5^n}.$$

Cette suite :

**a.** diverge vers $+\infty$

**b.** converge vers $\dfrac{2}{5}$

**c.** converge vers 0

**d.** converge vers $\dfrac{1}{3}$.

**Question 2 :**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.
L'expression de la fonction dérivée de $f$ est :

**a.** $f'(x) = 2x \ln x$.

**b.** $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$.

**c.** $f'(x) = 2$.

**d.** $f'(x) = x$.

**Question 3 :**

On considère une fonction $h$ définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variations de $h$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

On note $H$ la primitive de $h$ définie sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
Elle vérifie la propriété :

**a.** $H$ est positive sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

**b.** $H$ est croissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$.

**c.** $H$ est négative sur $]-\infty\ ;\ 1]$.

**d.** $H$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

**Question 4 :**

Soit deux réels $a$ et $b$ avec $a < b$.
On considère une fonction $f$ définie, continue, strictement croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ et qui s'annule en un réel $\alpha$.

Parmi les propositions suivantes, la fonction en langage Python qui permet de donner une valeur approchée de $\alpha$ à $0,001$ est :

**a.**
```
def racine(a, b) :
    while abs(b - a) >= 0.001 :
        m = (a + b)/2
        if f(m) < 0 :
            b = m
        else :
            a = m
    return m
```

**b.**
```
def racine(a, b) :
    m = (a + b)/2
    while abs(b - a) >= 0.001 :
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```

**c.**
```
def racine(a, b) :
    m = (a + b)/2
    while abs(b - a) <= 0.001 :
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```

**d.**
```
def racine (a, b) :
    while abs (b - a) >= 0.001 :
        m = (a + b)/2
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```

**Question 5 :**

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 7 sont bleues et les autres vertes.
On effectue trois tirages successifs avec remise. La probabilité d'obtenir exactement deux boules vertes est :

**a.** $\left(\frac{7}{10}\right)^2 \times \frac{3}{10}$

**b.** $\left(\frac{3}{10}\right)^2$

**c.** $\binom{10}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2$

**d.** $\binom{3}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2$

## Équations différentielles

### Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0,4y + 0,4$$

où $y$ désigne une fonction de la variable $t$, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

1. (a) Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
   (c) Déterminer la fonction $g$, solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0) = 10$.

**Partie II**

Soit $p$ la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1 + 9\,\mathrm{e}^{-0,4t}}.$$

1. Déterminer la limite de $p$ en $+\infty$.
2. Montrer que $p'(t) = \dfrac{3,6\,\mathrm{e}^{-0,4t}}{(1 + 9\,\mathrm{e}^{-0,4t})^2}$ pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$.
3. (a) Montrer que l'équation $p(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près à l'aide d'une calculatrice.

**Partie III**

1. $p$ désigne la fonction de la partie II.

   Vérifier que $p$ est solution de l'équation différentielle $y' = 0,4y(1-y)$ avec la condition initiale $y(0) = \dfrac{1}{10}$ où $y$ désigne une fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, 10 % des écoles ont accès à internet.

   Une politique volontariste d'équipement est mise en uvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet.

On note $t$ le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.

La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant $t$ est modélisée par $p(t)$.

Interpréter dans ce contexte la limite de la question II 1 puis la valeur approchée de $\alpha$ de la question II 3. b. ainsi que la valeur $p(0)$.