Chapitre X

Orthogonalité et distance dans l'espace

I Orthogonalité et produit scalaire

A orthogonalité dans l'espace

Définition

On dit qu'un vecteur est orthogonal à un plan s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

Propriété

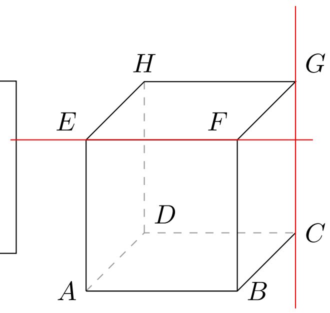
Si un vecteur est orthogonal à un plan, alors il est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.

Définition

Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles passant par un même point sont perpendiculaires dans le plan qu'elles définissent.

Remarque

Deux droites perpendiculaires sont orthogonales mais la réciproque est fausse.
Dans le cube ci-contre, les droites (EF) et (CG) ne sont pas perpendiculaires mais elles sont orthogonales.



B définition du produit scalaire

Définition

Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

Remarque

La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

— $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

— $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.

— $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.

— $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

— $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, où A, B et C sont trois points distincts du plan.

Définition

Un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$de l'espace est dit orthonormé si les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et si $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$

Propriété

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.

Propriété

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et λ un réel. Alors :

- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
- $\overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$

C Orthogonalité de deux vecteurs

Propriété

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

Propriété

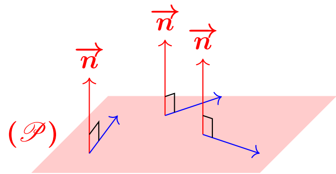
Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

II Plan de l'espace

A vecteur normal à un plan

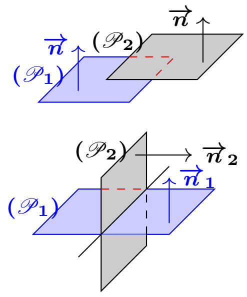
Définition

Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est dit normal à un plan $(\mathscr{P})$ s'il est non nul et orthogonal à tous les vecteurs contenus dans $(\mathscr{P})$.



Propriété

- Deux plans sont parallèles si et seulement si tout vecteur normal de l'un est un vecteur normal de l'autre.
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.



B équation cartésienne d'un plan de l'espace

Propriété

Dans l'espace munit d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$orthonormé de l'espace, on pose $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et un point $A(x_A; y_A; z_A)$.

Le plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ admet pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$

Démonstration

Soit $M(x; y; z)$ un point du plan $\mathscr{P}$ alors par définition le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$.
Donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ on obtient alors $(x - x_A)a + (y - y_A)b + (z - z_A)c = 0$ en développant on obtient $ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0$

III Distance dans l'espace

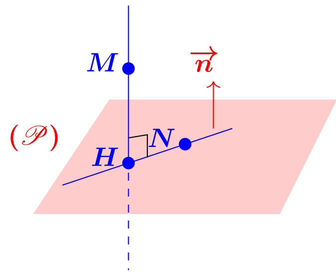
Rappel

On se place dans l'espace munit un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$orthonormé de l'espace, si on pose $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ et $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

A Projection orthogonale

Définition

On considère un plan $\mathscr{P}$ de l'espace dont on connait un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et un point M extérieur au plan.
Le **projeté orthogonal** du point M sur le plan $\mathscr{P}$ est l'intersection entre le plan et la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ et passant par M.



Définition

On considère une droite d de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ et un point N extérieur à cette droite.
Le **projeté orthogonal** de N sur d est l'intersection du plan normal à $\overrightarrow{n}$ passant par N avec la droite d.

B Distance d'un point à une droite ou un plan

Définition

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et A un point.
La **distance** du point A au plan $\mathscr{P}$ est la plus petite des longueurs AM avec $M \in \mathscr{P}$. On la note $d(A, \mathscr{P})$.

Propriété

Si l'on note H le projeté orthogonal d'un point A sur un plan $\mathscr{P}$, alors $d(A, \mathscr{P}) = AH$.

Démonstration

Soit un point M du plan $\mathscr{P}$ distinct de H. Comme la droite (AH) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$, on en déduit que le triangle AHM est rectangle en H et donc quelque soit le point M du plan, la distance AM sera supérieure à AH, donc $d(A, \mathscr{P}) = AH$.

Propriété

Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point. Si on note $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal de $\mathscr{P}$, alors :

$$d(A, \mathscr{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Définition

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et A un point.
La **distance** du point A au plan $\mathscr{P}$ est la plus petite des longueurs AM avec $M \in \mathscr{P}$. On la note $d(A, \mathscr{P})$.

Propriété

Si l'on note H le projeté orthogonal d'un point A sur un plan $\mathscr{P}$, alors $d(A, \mathscr{P}) = AH$.