Exercices

Équations différentielles

1 *Métropole Sujet 2 - 20 juin 2024*

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que 1 $\text{m}^3 = 1\,000$ L.
Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.
Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et $3\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.
Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.
Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à $0,01\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de $0,70\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.

Partie A : étude d'un modèle discret.

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de $0,3\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.
2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore, en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0,7$.
On admet que pour tout entier naturel n,
$$v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3.$$
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.
4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-après écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

```
def alerte_chlore(s) :
    n = 0
    u = 0.7
    while ... :
        n = ...
        u = ...
    return n
```

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu.

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$, dans la piscine.
On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -0,08y + \dfrac{q}{50}$, où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = Ce^{-0,08x} + \dfrac{q}{4}$ où C est une constante réelle.
2. (a) Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.
   (b) On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à $0,7\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.
   On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de $2\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$. Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

2 *Sujet 0 - 2021*

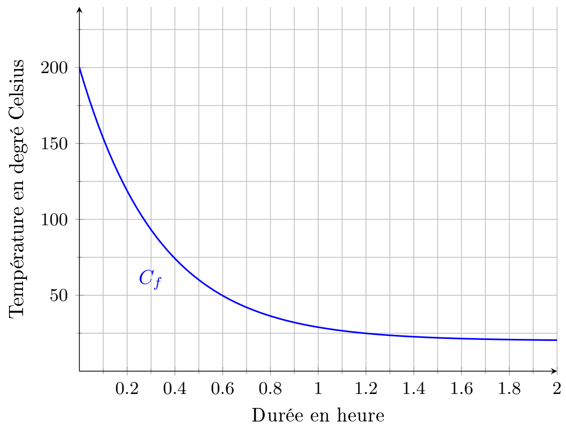
Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C.
On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.
On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.
Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.
Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C.
On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. (a) Préciser la valeur de $f(0)$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.
   (c) En déduire que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $f(t) = 200e^{-6t} + 25$.
2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :
   - décroît ;
   - tend à se stabiliser à la température ambiante.

   La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?
3. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans $[0\,;\,+\infty[$.

   Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40 °C. On note $\mathcal{T}_0$ le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.

   On donne en page suivante la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.



4. Avec la précision permise par le graphique, lire $\mathcal{T}_0$. On donnera une valeur approchée de $\mathcal{T}_0$ sous forme d'un nombre entier de minutes.

5. On s'intéresse ici à la diminution, minute après minute, de la température d'une baguette à sa sortie du four.

   Ainsi, pour un entier naturel n, $\mathcal{D}_n$ désigne la diminution de température en degré Celsius d'une baguette entre la n-ième et la $(n+1)$-ième minute après sa sortie du four.

   On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\mathcal{D}_n = f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right).$$

   (a) Vérifier que 19 est une valeur approchée de $\mathcal{D}_0$ à 0,1 près, et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

   (b) Vérifier que l'on a, pour tout entier naturel n :

$$\mathcal{D}_n = 200e^{-0,1n}\left(1 - e^{-0,1}\right).$$

   En déduire le sens de variation de la suite $(\mathcal{D}_n)$, puis la limite de la suite $(\mathcal{D}_n)$.

   Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice ?

3 *Bac S Asie - 20 juin 2019*

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite ; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

Partie B

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité :

$$\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - M).$$

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$.

   (a) Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{\mathrm{e}^{-0,2t}}$.
   Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, $f'(t) = 0$.

   (b) En conservant l'hypothèse du **a.**, calculer $f(0)$. En déduire, pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, une expression de $f(t)$, puis de $\theta(t)$.

   (c) Vérifier que la fonction θ trouvée en **b.** est solution du problème.

2. Dans cette question, on choisit $M = 10$. On admet qu'il existe une unique fonction g dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif t, et que, pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$: $g(t) = 10 + 70\mathrm{e}^{-0,2t}$, où t est exprimé en minute et $g(t)$ en degré Celsius.

   Une personne aime boire son café à 40 °C. Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$. Donner la valeur de t_0 arrondie à la seconde.

4 *Bac S Antilles-Guyane - 18 juin 2008*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}.$$

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E′) : $y' + 2y = 0$.

2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de (E′).

3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ est solution de l'équation (E).

4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Partie B

On nomme $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.

3. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.

4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec les axes du repère.