Échauffement

Chapitre IX Équations différentielles

1

Dans chacun des cas suivant déterminer la solution F de l'équation différentielle dont on connait une condition initiale.

1. $y' = x - 1$ et $F(1) = -1$.
2. $y' = x^2 - x + 1$ et $F(0) = 0$.
3. $y' = x^3 + x + \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $]0; +\infty[$ et $F(1) = \frac{3}{4}$.
4. $y' = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 2}{x^5}$ définie sur $]-\infty; 0[$ et $F(-1) = 1$.

2

Déterminer les solutions des équations différentielles données.

1. $y' - \frac{1}{2}y = 0$
2. $5y' + 3y = 0$
3. $2y' - 3y = 8y + 4y'$
4. $-\frac{3}{2}y' - \sqrt{2}y = 0$
5. $2y' - y = 2$
6. $\sqrt{2}y' = \sqrt{6}y - 1$

3

Dans chacun des cas déterminer la solution F de l'équation différentielle donnée qui respecte la condition précisée.

1. $y' + 2\sqrt{2}y = 0$ et $F(\sqrt{2}) = 1$.
2. $2y' - 3y = 2y + 3y'$ et $F(0) = 5$.
3. $\frac{1}{2}y' + y = \frac{1}{2}y - y'$ et $F(3) = \frac{1}{\mathrm{e}}$
4. $y' = 5y - 3$ et $F\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{2}{5}$

4

Montrer que $\varphi : x \mapsto 3x - 1$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = 9x$, puis donner toutes les solutions de (E).

5

Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi : x \mapsto ax + b$ soit une solution particulière de l'équation différentielle $(E) : 2y' - y = 2x$, puis donner toutes la solution F de (E) telle que $F(0) = -2$.

6

Soit y une fonction dérivable sur un intervalle I telle que y' est également dérivable sur I. On note y'' la dérivée de y'.

On souhaite résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' = -4x + 3$.

1. On pose $z = y'$. Déterminer une équation différentielle (E'), d'inconnue z, équivalente à (E).
2. résoudre cette équation différentielle.
3. À partir des solutions z de (E'), déterminer toutes les solutions y de (E).

7

Montrer que $\varphi : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}$, puis donner toutes les solutions de (E).

8

Soit f la fonction définie sur $I =]-2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 + 12x + 2}{(x+2)^2}.$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \in I$:
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}.$$
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

9

Vrai-Faux

1. La solution de l'équation différentielle $y' - 4y = 0$ qui prend la valeur y_0 en x_0 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto y_0 + e^{4(x - x_0)}$.
2. la fonction constante égale à 0 est solution de toutes les équations de la forme $y' = ay$ où a est un réel.
3. Les solutions non nulles de l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un réel strictement positif ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
4. Les solutions de l'équation différentielle $3y' - 2y = 1$ sont de la forme $C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + \frac{2}{3}$, où C est une constante réelle.

10

Une colonie de 2 000 bactéries est placée dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence. On admet que l'évolution en fonction du temps t en heure ($t > 0$) du nombre d'individus $N(t)$ de cette colonie suit l'équation différentielle $(E) : N'(t) = 3N(t) - 0,005(N(t))^2$.

Pour déterminer $N(t)$ on se propose de remplacer (E) par une équation plus simple puis de la résoudre.

1. On suppose que la fonction N ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ et on définit sur ce même intervalle la fonction g par $g(t) = \dfrac{1}{N(t)}$. Déterminer $g'(t)$.
2. Montrer que N est solution de (E) si, et seulement si, g est solution de $(E') : y' = -3y + 0,005$.
3. Résoudre (E') puis résoudre (E).
4. (a) Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale indiquée dans l'énoncé.
   (b) Calculer le nombre de bactéries présentes au bout de deux heures. Arrondir à l'unité.