Échauffement

Chapitre X - Équation de plan et distance

1 Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ déterminer une équation du plan de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par A dans les cas suivants.

1. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$ $\quad A\,(1;0;1)$
2. $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\7\\-4\end{pmatrix}$ $\quad A\,(3;-2;2)$

2

Pour chacun des plans suivants déterminer un vecteur normal et dire si le point $P(1;3;5)$ appartient au plan.

1. $x-2y+z+4=0$
2. $5x-z=0$
3. $x+y+z+9=0$
4. $3x+2y-3z+6=0$

3

Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par $G(3;3;3)$ et orthogonale au plan $\mathscr{L}$ d'équation $x+2y-2z+15=0$.
En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de G sur $\mathscr{L}$

4

Soit d la droite de représentation paramétrique $\begin{cases}x=2t+1\\y=t-3\\z=-2t+4\end{cases}$ $,t\in\mathbb{R}$ et le point $S(1;1;1)$.

1. Déterminer une équation du plan orthogonal ç d et passant par S.
2. Déterminer les coordonnées de A, point d'intersection du plan et de d.
3. Que représente ce point ?
4. Calculer la distance entre S et d.

5

Soient $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x+3y-6z+12=0$ et $\mathscr{P}'$ le plan de vecteur normal $\vec{n'}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-1\\2\end{pmatrix}$ contenant le point $M(3;2;3)$.

1. Donner une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}'$.
2. (a) Donner un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathscr{P}$.
   (b) Le plan $\mathscr{P}$ contient-il le point M ?
3. Calculer les coordonnées de $-3\vec{n'}$. Qu'en déduire pour les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$?

6 On donne a,b, c et d quatre réels tels que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. Soient $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point quelconque de l'espace. On considère un point $M(x;y;z)$ un point du plan $\mathscr{P}$ et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

1. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathscr{P}$.
2. Justifier que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$.
3. En utilisant la formule du cosinus, exprimer $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$.
4. Que peut-on dire de l'angle $\left(\overrightarrow{AH},\vec{n}\right)$.
5. En déduire que $|\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}|=AH\times\|\vec{n}\|$.
6. En remarquant que $d=-ax-by-cz$, simplifier l'expression analytique de $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}$.
7. Retrouvez la formule de la distance d'un point à un plan.

7

Partie A

Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on définit les points $H(2;2;-4)$ et $K(3;1;-3)$.

1. Quelles sont les coordonnées de L, milieu du segment $[HK]$?
2. Déterminer une équation du plan contenant L et de vecteur normal $\overrightarrow{HK}$?
3. Justifier que le point $M\left(x;y;-x+y-\frac{5}{2}\right)$ est un point de ce plan.
4. Calculer les distances MH et MK que remarque-t-on ?

Ce plan est appelé plan médiateur du segment [HK]

Partie B

Soit le point $P(1;2;3;)$ déterminer l'équation d'une droite dont tous les points seraient équidistant aux points P, H et K.

8

Dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne le point $\Omega(1;3;2)$ et les points $R(0;-1;-2)$, $S(5;2;6)$ et $T(-3;-1;1)$.

1. (a) Calculer les longueurs ΩR, ΩS et ΩT.
   (b) Peut-on en déduire que R, S et T sont sur un même cercle ? justifiez.
2. (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$.
   (b) Justifiez que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-13\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (RST). En déduire une équation de ce plan.
   (c) Le point Ω appartient-il à ce plan ? Justifier.
3. Soit $M(x;y;z)$ un point du repère.
   (a) Calculer ΩM^2.
   (b) En déduire une équation de la sphère de centre Ω et de rayon R.