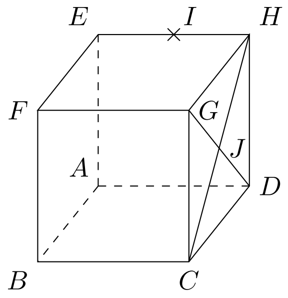
Échauffement

Chapitre X - Le produit scalaire

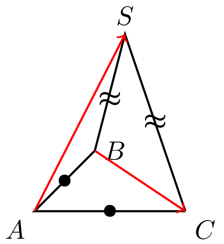
1 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté $a > 0$. Soient I le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.



Exprimer en fonction de a les produits scalaires :

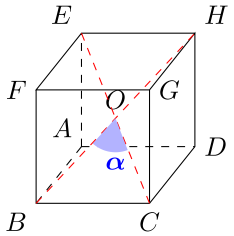
1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FH}$
2. $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{GD}$
3. $\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GJ}$
4. $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{GD}$
5. $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{FG}$
6. $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IH}$
7. $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{EJ}$
8. $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$
9. $\overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{CH}$

2 Soit $SABC$ un tétraèdre de tel que les triangles ABC et SBC soient isocèles respectivement en A et S :



Démontrer que $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

3 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1 et de centre O.



Calculer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\alpha = \widehat{BOC}$ au degré près.

4 Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1\,;-2\,;3)$, $B(-1\,;0\,;1)$ et $C(2\,;1\,;0)$.
Calculer, au dixième de degré près, une mesure des angles :

1. $\widehat{ABC}$
2. $\widehat{BAC}$
3. $\widehat{ACB}$

5 On se place dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :

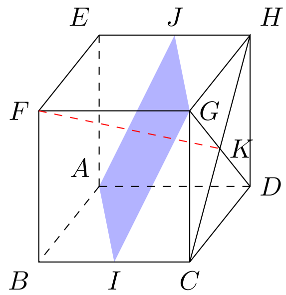
1. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-2\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4\\24\end{pmatrix}$
4. $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

6 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix}k\\-2\\k-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\k\\k\end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$. Déterminer la ou les valeurs de k pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

7 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les quatre points $A(-1\,;1\,;2)$, $B(1\,;0\,;-1)$, $C(0\,;3\,;1)$ et $D(-8\,;2\,;-3)$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur normal à ce plan.

8 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[EH]$ et K le centre de la face $CDHG$.

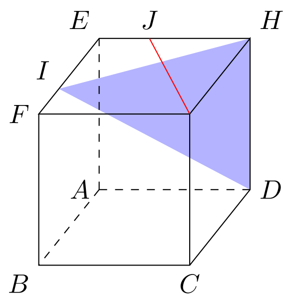


Sans utiliser de repère :

1. démontrer que les points A, I, G et J sont coplanaires ;
2. (a) démontrer que (FK) est orthogonale à (IJ) ;
   (b) démontrer que (FK) est orthogonale à (AI) ;
   (c) en déduire que (FK) est orthogonale au plan (AIG).

9 Reprendre l'exercice précédent en travaillant dans un repère orthonormé bien choisi.

10 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les points tels que $\overrightarrow{EI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$.



1. Démontrer que (GJ) est perpendiculaire à (IH).
2. Démontrer que (GJ) est orthogonale à (HD).
3. En déduire que (GJ) est orthogonale à (ID).