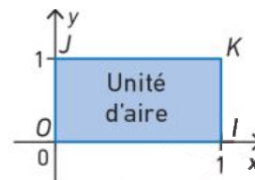


I - Aire sous la courbe d'une fonction continue positive

Définition 1 : unité d'aire

Soit un repère orthogonal (O, I, J) , soit K le point de coordonnées $(1; 1)$.

L'aire du rectangle $OIKJ$ est appelé **unité d'aire** (u.a.).



Exemple

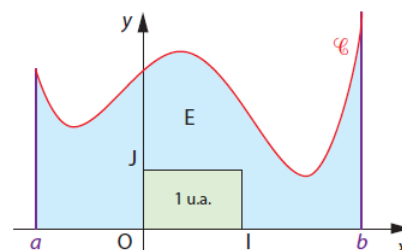
Si $OI = 3$ cm et $OJ = 2$ cm, alors $1 \text{ u.a.} = 6 \text{ cm}^2$.

Définition 2 : domaine sous la courbe d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unités d'aire, est appelée **intégrale de a à b de la fonction f** .

Elle est notée $\int_a^b f(x) dx$.



Remarque

La variable x est dite **variable muette**, on peut aussi écrire $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$

Théorème fondamental

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et F la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. La fonction F est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f .

II - Propriétés des intégrales

Propriété 1 : Positivité

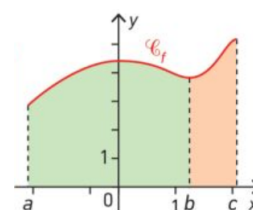
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Alors :

$$1. \int_a^b f(x) dx \geq 0. \qquad 2. \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Propriété 2 : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; c]$ et soit $b \in [a; c]$. Alors :

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$



III - Application au calcul d'aires

Propriété 5 : corollaire du théorème fondamental

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Soit F une primitive de f sur $[a; b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Remarques

1. $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive de f choisie. Si G est une primitive quelconque de f , $G = F + k$ donc $G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$.
2. Le nombre $F(b) - F(a)$ est noté $[F(x)]_a^b$.

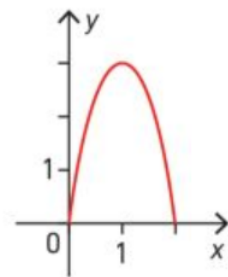
Exemple

Soit la fonction $f(x) = -3x^2 + 6x$ définie sur $\mathbb{R}$. On note A l'aire sous la courbe de f sur l'intervalle $[0; 2]$.

La fonction f est continue sur $[0; 2]$ et $f(x) = 3x(-x + 2)$, donc f est positive sur $[0; 2]$. La fonction $F(x) = -x^3 + 3x^2$ est une primitive de f sur $[0; 2]$.

On a donc

$$A = \int_0^2 -3x^2 + 6x dx = F(2) - F(0) = (-2^3 + 3 \times 2^2) - (-0^3 + 3 \times 0^2) = 4$$



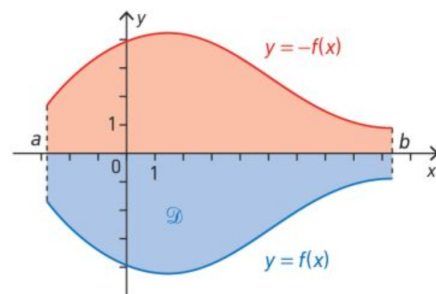
La propriété suivante exploite la symétrie entre la courbe d'une fonction f et la courbe de la fonction $-f$ afin de calculer l'aire "sous" la courbe d'une fonction continue **négative**.

Propriété 6 : aire sous la courbe d'une fonction négative

Soient f une fonction continue et négative sur l'intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, exprimée en unités d'aire, est égale à

$$\int_a^b -f(x) dx.$$

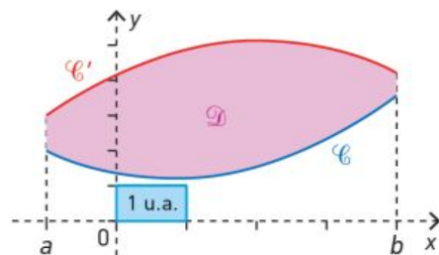


Propriété 7 : aire entre deux courbes

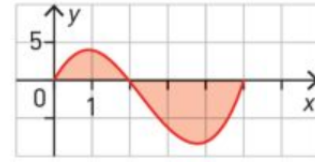
Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$ telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.

L'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, exprimée en unités d'aire, est égale à

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$



Soit la fonction $f(x) = x(x-2)(x-5)$ définie sur $[0; 5]$ dont la courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-contre dans le repère orthogonal d'unité 0,5 cm.



Calculons l'aire de la partie colorée.

- Étudions le signe de f sur $[0, 5]$.

Pour tout $x \in [0; 5]$, $x \geq 0$ et $x - 5 \leq 0$ donc $x(x - 5) \leq 0$.

Le signe de f est donc l'opposé du signe de $x - 2$ sur $[0; 5]$. Or $x - 2 \leq 0$ si et seulement si $x \leq 2$ et $x - 2 \geq 0$ si et seulement si $x \geq 2$.

Finalement, f est positive sur $[0; 2]$ et négative sur $[2; 5]$.

- Calculons une primitive de f . En développant on obtient $f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$.

Une primitive sur $[0; 5]$ est donnée par $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 5x^2$.

- Notons $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}$ sur $[0; 2]$.

$$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 5x^2 \right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$

- Notons $\mathcal{A}'$ l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}$ sur $[2; 5]$.

$$\mathcal{A}' = \int_2^5 -f(x) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - 5x^2 \right]_2^5 = 15,75.$$

L'aire colorée est finalement de $\frac{253}{12}$ u.a. Or 1 u.a. = $0,5 \times 5 \times 0,5 = 1,25 \text{ cm}^2$ donc l'aire colorée est de $26,35 \text{ cm}^2$ environ.

IV - Intégrale d'une fonction continue

La définition suivante généralise la notion d'intégrale dans le cas d'une fonction continue de signe quelconque.



Définition 3 : intégrale d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b appartenant à I . Soit F une primitive de f sur I . L'intégrale de a à b de f est définie par

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



Propriété 8 : relation de chasles et linéarité

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soient a , b et c appartenant à I et λ un réel.

- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$

- Relation de Chasles :** $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$

- Linéarité :**

$$- \int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$- \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$



Propriété 9 : positivité et Inégalité

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$.

1. **Positivité** : si $f(x) \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
2. **Ordre** : si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.



Définition 4 : valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On appelle **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a; b]$ le nombre réel

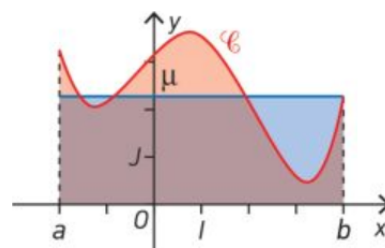
$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Interprétation géométrique

Si f est une fonction positive, on a

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a).$$

L'aire sous la courbe de la fonction f (en rouge) est donc égale à l'aire du rectangle de largeur $b-a$ et de hauteur μ (en bleu).



Propriété 10 : Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I et a et b deux réels appartenant à I . Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Exemples

Soit la fonction $f(x) = (x-1)e^x$ et calculons $\int_1^2 f(x) dx$.

Posons pour tout $x \in [1; 2]$, $v(x) = x-1$ et $u'(x) = e^x$. On a donc, pour tout $x \in [1; 2]$, $v'(x) = 1$ et on peut choisir $u(x) = e^x$.

u et v sont dérivables sur $[1; 2]$ et u' et v' sont continues sur $[1; 2]$. Intégrons donc par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 \underbrace{(x-1)}_{v(x)} \underbrace{e^x}_{u'(x)} dx \\ &= [u(x)v(x)]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x) dx \\ &= [(x-1)e^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx \\ &= (2-1)e^2 - (1-1)e^1 - [e^x]_1^2 \\ &= e^2 - (e^2 - e) \\ &= e \end{aligned}$$