

Calcul intégral

1 Bac S - Centres étrangers Juin 2019

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.

Partie A

- Vérifier, en détaillant le calcul, que si $u_1 = 0$ alors $u_4 = -17$.
- Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'en saisissant préalablement dans U une valeur de u_1 il calcule les termes de la suite (u_n) de u_2 à u_{13} .

```

For i in range(12) :
    U =
```

- On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0,7$ puis pour $u_1 = 0,8$. Voici les valeurs obtenues.

Pour $u_1 = 0,7$	Pour $u_1 = 0,8$
0,4	0,6
0,2	0,8
-0,2	2,2
-2	10
-13	59
-92	412
-737	3 295
-6 634	29 654
-66 341	296 539
-729 752	3 261 928
-8 757 025	39 143 135
-113 841 326	508 860 754

Quelle semble être la limite de cette suite si $u_1 = 0,7$?
Et si $u_1 = 0,8$?

Partie B

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n , supérieur ou égal à 1, par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

- Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $F(x) = (-1-x)e^{1-x}$ est une primitive sur l'intervalle $[0; 1]$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = xe^{1-x}$.
- En déduire que $I_1 = e - 2$.
- On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

Utiliser cette formule pour calculer I_2 .

- Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.
 - Justifier que : $\int_0^1 x^n e dx = \frac{e}{n+1}$.
 - En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.
 - Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Partie C

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n = n!(u_1 - e + 2) + I_n.$$

On rappelle que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

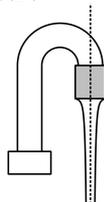
$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{et} \quad I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

- On admet que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$.

- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ lorsque $u_1 = 0,7$.
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ lorsque $u_1 = 0,8$.

2 Bac S - Polynésie 19 juin 2019

L'écoulement de l'eau d'un robinet a un débit constant et modéré.



On s'intéresse en particulier à une partie du profil d'écoulement représentée en **annexe 1** par la courbe C dans un repère ortho-normé.

Partie A

On considère que la courbe C donnée en **annexe 1** est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $]0; 1]$ qui respecte les trois conditions suivantes :

$$(H) : f(1) = 0 \quad f'(1) = 0,25 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty.$$

- La fonction f peut-elle être une fonction polynôme du second degré? Pourquoi?
- Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; 1]$ par $g(x) = k \ln x$.
 - Déterminer le réel k pour que la fonction g respecte les trois conditions (H) .
 - La courbe représentative de la fonction g coïncide-t-elle avec la courbe C ? Pourquoi?
- Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0; 1]$ par $h(x) = \frac{a}{x^4} + bx$ où a et b sont des réels.
Déterminer a et b pour que la fonction h respecte les trois conditions (H) .

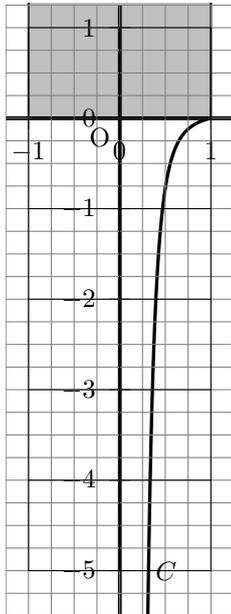
Partie B

On admet dans cette partie que la courbe C est la représentation graphique d'une fonction f continue, strictement croissante, définie et dérivable sur l'intervalle $]0; 1]$ d'expression :

$$f(x) = \frac{1}{20} \left(x - \frac{1}{x^4} \right).$$

- Justifier que l'équation $f(x) = -5$ admet sur l'intervalle $]0; 1]$ une unique solution qui sera notée α . Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
- On admet que le volume d'eau en cm^3 , contenu dans les 5 premiers centimètres de l'écoulement, est donné par la formule : $V = \int_{\alpha}^1 \pi x^2 f'(x) dx$.
 - Soit u la fonction dérivable sur $]0; 1]$ définie par $u(x) = \frac{1}{2x^2}$. Déterminer sa fonction dérivée.
 - Déterminer la valeur exacte de V . En utilisant la valeur approchée de α obtenue à la question 1, donner alors une valeur approchée de V .

Annexe 1



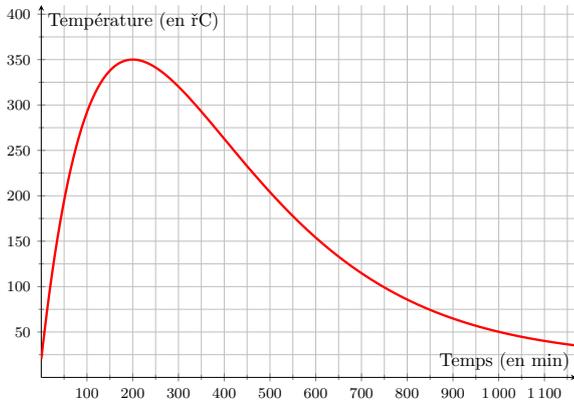
3 Centres étrangers - 6 juin 2024

Un organisme certificateur est missionné pour évaluer deux appareils de chauffage, l'un d'une marque A et l'autre d'une marque B.

Partie 1 : appareil de la marque A

À l'aide d'une sonde, on a mesuré la température à l'intérieur du foyer d'un appareil de la marque A.

On a représenté, ci-dessous, la courbe de la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer en fonction du temps écoulé, exprimé en minutes, depuis l'allumage du foyer.



Par lecture graphique :

- Donner le temps au bout duquel la température maximale est atteinte à l'intérieur du foyer.
- Donner une valeur approchée, en minutes, de la durée pendant laquelle la température à l'intérieur du foyer dépasse 300 °C.
- On note f la fonction représentée sur le graphique.

Estimer la valeur de $\frac{1}{600} \int_0^{600} f(t) dt$. Interpréter le résultat.

Partie 2 : étude d'une fonction

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = 10te^{-0,01t} + 20$.

- Déterminer la limite de g en $+\infty$.

- Montrer que pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, $g'(t) = (-0,1t + 10)e^{-0,01t}$.
 - Étudier les variations de la fonction g sur $[0 ; +\infty[$ et construire son tableau de variations.
- Démontrer que l'équation $g(t) = 300$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[0 ; +\infty[$. En donner des valeurs approchées à l'unité.
- À l'aide d'une IPP, calculer $\int_0^{600} g(t) dt$.

4 Bac S - Amérique du Sud Novembre 2019

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme. Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à 2,5 $\mu\text{g/mL}$. Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie. On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3te^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geq 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en $\mu\text{g/mL}$) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

- Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?
 - Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.
 - Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
- On admet que la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$. Vérifier que pour tout nombre réel t positif,

$$f'(t) = \frac{3}{4}(4-t)e^{-\frac{1}{4}t}.$$
- Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f (en incluant la limite en $+\infty$).
 - À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal? Quel est alors ce taux? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
- Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à $[0 ; 4]$ telle que $f(t_0) = 2,5$. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

On admet qu'il existe une unique valeur t_1 appartenant à $[4 ; +\infty[$ vérifiant $f(t_1) = 2,5$ telle que $t_1 \approx 18,930$.

- Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 $\mu\text{g/mL}$ dans le sang.
- Soit F la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $F(t) = -12(t+4)e^{-\frac{1}{4}t} + 2t$.
 - Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f et en déduire une valeur approchée de $\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt$ à l'unité près.
 - En déduire une valeur approchée à 0,1 près du taux moyen de vasopressine, lors d'un accident hémorragique durant la période où ce taux est supérieur à 2,5 $\mu\text{g/mL}$.