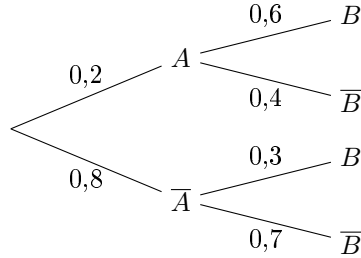


Corrigé de l'exercice 3

1. (a) On modélise l'expérience à l'aide d'un arbre de probabilités :



- (b) On cherche la probabilité de l'évènement $A \cap B$. En utilisant l'arbre précédent on obtient :

$$P(A \cap B) = 0,2 \times 0,6 = 0,12.$$

- (c) D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= 0,12 + 0,24 \\ &= 0,36 \end{aligned}$$

- (d) On cherche la probabilité $P_B(\bar{A})$. D'après le cours :

$$\begin{aligned} P_B(\bar{A}) &= \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{0,24}{0,36} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

La probabilité que l'épreuve de chant se passe mal sachant que l'épreuve de cuisine est réussie est $\frac{2}{3}$.

2. (a) On donne les lois de probabilités de X_1 et X_2 :

x_i	1	2
$P(X_1 = x_i)$	0,8	0,2

x_i	-1	1
$P(X_2 = x_i)$	0,64	0,36

- (b) L'espérance de X_1 est

$$E(X_1) = 1 \times 0,8 + 2 \times 0,2 = 1,2.$$

L'espérance de X_2 est

$$E(X_2) = -1 \times 0,64 + 0,36 = -0,28.$$

- (c) La variable aléatoire X représente le nombre de points obtenus à l'issue des deux premières épreuves. Par linéarité de l'espérance on a :

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2) \\ &= E(X_1) + E(X_2) \\ &= 1,2 - 0,28 \\ &= 0,92 \end{aligned}$$

Cela signifie qu'en moyenne un candidat obtient 0,92 points aux deux premières épreuves.

3. (a) L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.
 (b) On donne la loi de probabilités de X :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,56	0,08	0,24	0,12

- (c) La variance de X est $V(X) = 0,56(0 - 0,92)^2 + 0,08(1 - 0,92)^2 + 0,24(2 - 0,92)^2 + 0,12(3 - 0,92)^2 = 1,2736$.
 (d) Calculons les variances des variables X_1 et X_2 : $V(X_1) = 0,8(1 - 1,2)^2 + 0,2(2 - 1,2)^2 = 0,32$ et $V(X_2) = 0,64(-1 + 0,28)^2 + 0,36(1 + 0,28)^2 = 0,9216$.
 On a d'une part $V(X_1) + V(X_2) = 0,32 + 0,9216 = 1,2416$ et d'autre part $V(X) = V(X_1 + X_2) = 1,2736$. Ainsi $V(X_1 + X_2) \neq V(X_1) + V(X_2)$ et les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.
 4. (a) Il s'agit d'une répétition de 10 épreuves de Bernoulli indépendantes (les questions sont indépendantes) de paramètre $\frac{2}{5}$. La variable aléatoire Y compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli donc elle suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{2}{5}$.
 (b) On cherche la probabilité de l'évènement $\{X \geq 1\}$. On a :

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - 0,8^{10} \\ &\approx 0,89 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un candidat obtienne au moins une bonne réponse est de 0,89 environ.

- (c) Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{2}{5}$. D'après le cours son espérance et sa variance sont données par :

$$E(Y) = np = 10 \times 0,2 = 2 \quad \text{et} \quad V(Y) = np(1 - p) = 10 \times 0,2 \times 0,8 = 1,6.$$

5. (a) Par linéarité de l'espérance on a :

$$\begin{aligned} E(S) &= E(X + Y) \\ &= E(X) + E(Y) \\ &= 0,92 + 2 \\ &= 2,92 \end{aligned}$$

Les variables X et Y sont de plus indépendantes donc on a :

$$\begin{aligned} V(S) &= V(X + Y) \\ &= V(X) + V(Y) \\ &= 1,2736 + 1,6 \\ &= 2,8736 \end{aligned}$$

- (b) Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(M_n) &= E\left(\frac{1}{n}(S_1 + \dots + S_n)\right) \\ &= \frac{1}{n}E(S_1 + \dots + S_n) \\ &= \frac{1}{n} \times n \times E(S) \\ &= 2,92 \end{aligned}$$

Les variables $S_1, \dots, S_n$ sont indépendantes donc :

$$\begin{aligned} V(M_n) &= V\left(\frac{1}{n}(S_1 + \dots + S_n)\right) \\ &= \frac{1}{n^2} V(S_1 + \dots + S_n) \\ &= \frac{1}{n^2} \times n \times V(S) \\ &= \frac{2,8736}{n} \end{aligned}$$

- (c) D'après la question précédente on a $P(|M_n - 2,92| \geq 2) = P(|M_n - E(M_n)| \geq 2)$. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 2$:

$$P(|M_n - E(M_n)| \geq 2) \leq \frac{V(M_n)}{2^2}$$

d'où

$$P(|M_n - E(M_n)| \geq 2) \leq \frac{0,7184}{n}$$

- (d) On cherche le plus petit entier naturel n tel que $P(1,32 < M_n < 5,32) \geq 0,9$.

On a :

$$\begin{aligned} P(1,32 < M_n < 5,32) &= P(-2 < M_n < 2) \\ &= P(|M_n - 2| < 2) \\ &= 1 - P(|M_n - 2| \geq 2) \end{aligned}$$

D'après la question précédente on déduit :

$$P(1,32 < M_n < 5,32) \geq 1 - \frac{0,7184}{n}$$

On cherche donc à résoudre l'inéquation

$$1 - \frac{0,7184}{n} \geq 0,9.$$

On isole n :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{0,7184}{n} \geq 0,9 &\iff \frac{0,7184}{n} \leq 0,1 \\ &\iff n \geq \frac{0,7184}{0,1} \\ &\iff n \geq 7,184 \end{aligned}$$

Il faut donc au moins 8 candidats pour que la probabilité que M_n soit compris strictement entre 0,92 et 4,92 soit supérieure à 90 %.