BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2025

MATHÉMATIQUES

Épreuve de spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures** – COEFFICIENT : **16**

Ce sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

BAC BLANC

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 **5 points**

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.

Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.

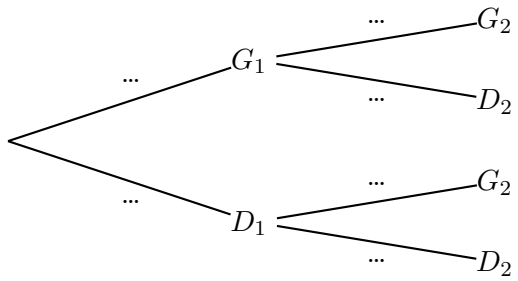
Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de $0,2$.
De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.
On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :

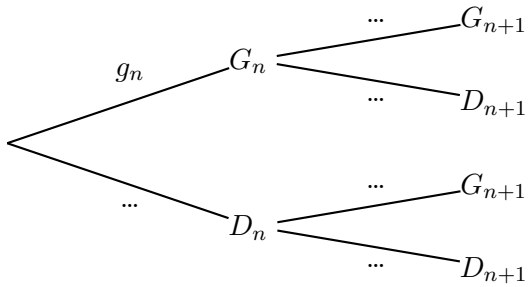
- G_n : « Léa gagne la n-ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n-ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n.
On a donc $g_1 = 0,5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $p_{G_1}(D_2)$?
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2.
4. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.



   (b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2.$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0,4$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   On précisera son premier terme et sa raison.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$$

6. Étudier les variations de la suite (g_n).
7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n).
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
8. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0,4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1  def seuil(e) :
2      g = 0.5
3      n = 1
4      while ... :
5          g = 0.5 * g + 0.2
6          n = ...
7      return (n)
```

Exercice 2 **4 points**

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Au cours de la fabrication d'une paire de lunettes, la paire de verres doit subir deux traitements notés T1 et T2.

Partie A

On prélève au hasard une paire de verres dans la production.
On désigne par A l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 ».
On désigne par B l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 ».
On note respectivement $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de A et B.
Une étude a montré que :

- la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 notée $P(A)$ est égale à 0,1.
- la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 notée $P(B)$ est égale à 0,2.
- la probabilité qu'une paire de verres ne présente aucun des deux défauts est $0,75$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes.

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			1

2. (a) Déterminer, en justifiant la réponse, la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2.
   (b) Donner la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts, un pour chaque traitement T1 et T2.
   (c) Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
3. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.

4. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T2, sachant que cette paire de verres présente un défaut pour le traitement T1.

Partie B

On prélève, au hasard, un échantillon de 50 paires de verres dans la production. On suppose que la production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de ce type, associe le nombre de paires de verres qui présentent le défaut pour le traitement T1.

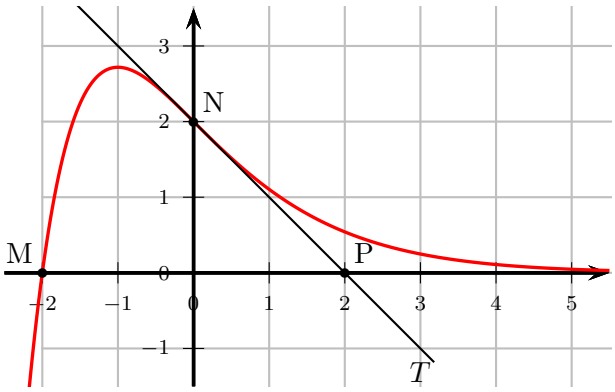
1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Donner l'expression permettant de calculer la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, exactement 10 paires de verres qui présentent ce défaut.
   Effectuer ce calcul et arrondir le résultat à 10^{-3}.

Exercice 3 **6 points**

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.
Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en son point N$(0\,;\,2)$;
- le point M$(-2\ ;\ 0)$ appartenant à $\mathcal{C}_f$ et P$(2\,;\,0)$ appartenant à la tangente T.

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.

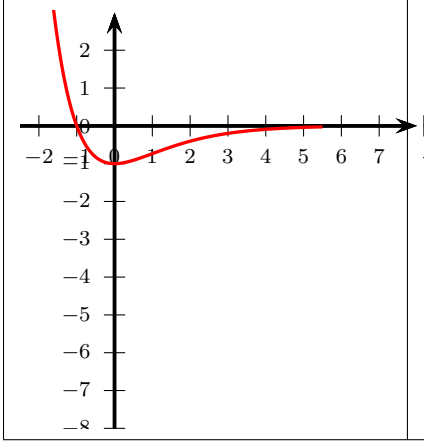
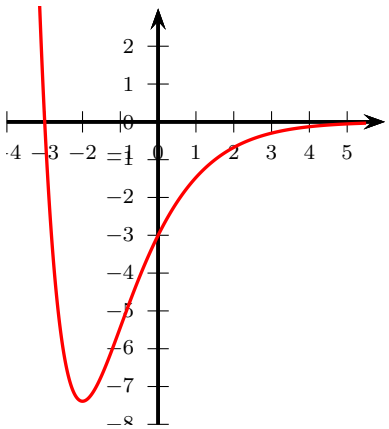
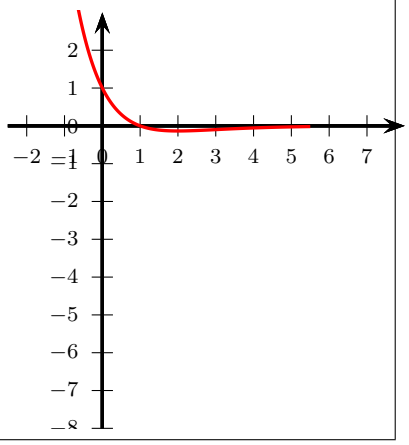


Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. (a) Donner $f(0)$.
   (b) Déterminer $f'(0)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.

4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une fonction dont la dérivée est la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.

Courbe 1	Courbe 2	Courbe 3
		

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a, b et λ sont des constantes réelles.
Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.
2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.
3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On admet que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction dérivée f' de f est donnée par

$$f'(x) = (-x - 1)\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Dresser le tableau de variations complet de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $]-\infty; -1]$.
5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on admet que sa dérivée seconde est définie par $f"(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Étudier la convexité de f.
   (b) Préciser, en justifiant, les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 4 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Les cinq questions sont indépendantes.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 0,05 - \frac{x-1}{x^2+1}.$$

La limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à :

a. $+\infty$ **b.** 0,05 **c.** $-\infty$ **d.** 0

2. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-2; 4]$ telle que :

$$h(-1) = 0, \qquad h(1) = 4, \qquad h(3) = -1.$$

On peut affirmer que :

a. la fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
b. la fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
c. il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[1\ ;\ 3]$ tel que $h(a) = 1$.
d. l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et (v_n) converge vers 0 .
On peut affirmer que :

a. la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge.
b. la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge.
c. la suite (u_n) est croissante.
d. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n)^n = -\infty$

4. On considère une suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$3 \geq u_{n+1} \geq u_n$$

On peut affirmer que :

a. (u_n) converge vers 3.
b. (u_n) converge vers une limite inférieure ou égale à 3.
c. on ne peut pas conclure quant à la limite éventuelle de (u_n).
d. (u_n) diverge.

5. On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(3\ ;\ p)$.
On sait que $P(X = 0) = \dfrac{1}{125}$. On peut affirmer que :

a. $p = \dfrac{1}{5}$
b. $P(X = 1) = \dfrac{124}{125}$
c. $p = \dfrac{4}{5}$
d. $P(X = 1) = \dfrac{4}{5}$