BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2025

MATHÉMATIQUES

Épreuve de spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures** – COEFFICIENT : **16**

Ce sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

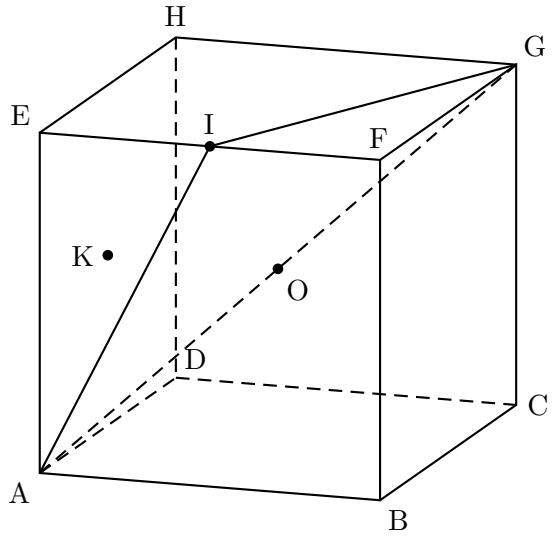
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

BAC BLANC

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 **5 points**

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. Le point I est le milieu du segment [EF], K le centre du carré ADHE et O le milieu du segment [AG].



Le but de l'exercice est de calculer de deux manières différentes, la distance du point B au plan (AIG).

Partie 1. Première méthode

1. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, et G.
   On admet que les points I et K ont pour coordonnées $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$ et $K\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
2. Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).
3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est : $2x - y - z = 0$.
4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BK).
5. En déduire que le projeté orthogonal L du point B sur le plan (AIG) a pour coordonnées $L\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.
6. Déterminer la distance du point B au plan (AIG).

Partie 2. Deuxième méthode

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times b \times h$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

1. (a) Justifier que dans le tétraèdre ABIG, [GF] est la hauteur relative à la base AIB.
   (b) En déduire le volume du tétraèdre ABIG.
2. On admet que $AI = IG = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et que $AG = \sqrt{3}$.
   Démontrer que l'aire du triangle isocèle AIG est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.
3. En déduire la distance du point B au plan (AIG).

Exercice 2 **5 points**

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 1 cm (**Figure 2**).

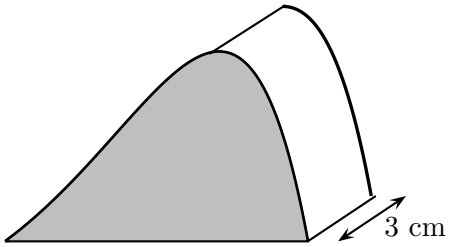


Figure 1

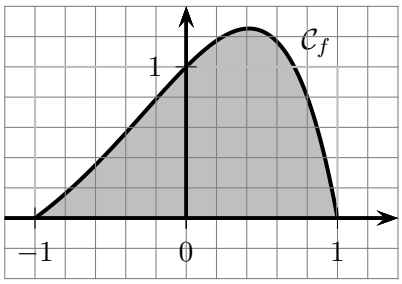


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = \left(1 - x^2\right)\mathrm{e}^x.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. (a) Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ on a $f(x) \geqslant 0$.
   (b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^x\mathrm{d}x.$$

2. Le volume $\mathcal{V}$ de chocolat, en cm^3, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathcal{V} = 3 \times S$$

   où S est l'aire, en cm^2, de la surface colorée (**Figure 2**).
   En déduire que ce volume $\mathcal{V}$, arrondi à $0,1$ cm^3 près, est égal à $4,4$ cm^3.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0,01\ ;\ +\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2[2 - 3\ \ln(q)] - 3.$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0,01\ ;\ +\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{q \to +\infty} B(q)$.

(b) Montrer que, pour tout $q \geqslant 0,01$, $B'(q) = 8q(1 - 6\ln(q))$.

(c) Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de B sur $[0,01\ ;\ +\infty[$.
Dresser le tableau de variation complet de la fonction B.

(d) Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan ?

2. (a) Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1,2\ ;\ +\infty[$.
Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

(b) On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0,01\ ;\ 1,2[$.
On donne $\alpha \approx 0,757$.
En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.

Exercice 3 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui comprend cinq questions. Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chacune des questions, ***une seule des quatre réponses est exacte****. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.*
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

1. La solution f de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ telle que $f(0) = 1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

A. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$

B. $f(x) = -\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$

C. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$

D. $f(x) = -\dfrac{10}{3}\mathrm{e}^{-3x} - \dfrac{7}{3}$

2. On pose $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{100}$.

Parmi les scripts Python ci-dessous, celui qui permet de calculer la somme S est :

a.
```
def somme_a() :
    S = 0
    for k in range(100) :
        S=1/(k+1)
    return S
```

b.
```
def somme_b() :
    S = 0
    for k in range(100) :
        S = S + 1/(k + 1)
    return S
```

c.
```
def somme_c() :
    k = 0
    while S < 100 :
        S = S+1/(k+1)
    return S
```

d.
```
def somme_d() :
    k = 0
    while k < 100 :
        S = S + 1/(k + 1)
    return S
```

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 \ln\left(x^2 + 4\right)$.

Alors $\displaystyle\int_0^2 g'(x)\,\mathrm{d}x$ vaut, à 10^{-1} près :

A. 4,9

B. $8,3$

C. $1,7$

D. $7,5$

4. Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale. Elle veut former un groupe de 5 élèves. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe de 5 élèves ?

   A. 31^5 **B.** $31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27$

   C. $31 + 30 + 29 + 28 + 27$ **D.** $\binom{31}{5}$

5. La professeure s'intéresse maintenant à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe :

   - 10 élèves ont choisi la spécialité physique-chimie ;
   - 20 élèves ont choisi la spécialité SES ;
   - 1 élève a choisi la spécialité LLCE espagnol.

   Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe ?

   A. $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$ **B.** $\binom{20}{3} + \binom{11}{2}$

   C. $\binom{20}{3}$ **D.** $20^3 \times 11^2$

Exercice 4 **5 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

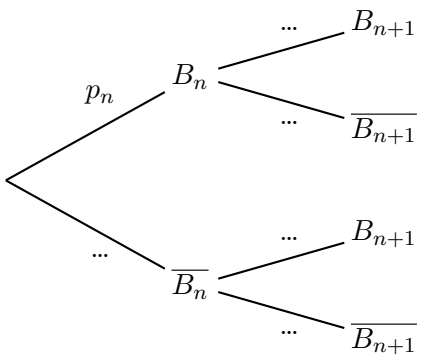
Partie A

On estime que :

- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,9$;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est $0,4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel. On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.
   On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant 0,8$.
   (b) À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?
5. (a) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,8$.
   Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   (b) En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.
   (c) En déduire la limite de la suite (p_n).

Partie B

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

- l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres ;
- la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à $0,8$.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état.
Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15.